

**queste istituzioni**

---

**Frattali e sistemi giuridici**

**Maria Rita Maiolo**

**Numero 2/2022**

**30 giugno 2022**

---



# Frattali e sistemi giuridici

di Maria Rita Maiolo\*

## Sommario

1. Premesse introduttive di metodo e di contenuti – 2. I frattali in matematica. – 3. Cosa c'è di frattale in ambito normativo-legale e in giurisprudenza? – 4. Un esempio di ramificazione frattale su contenzioso riguardo ad un brevetto per il riuso dei materiali. – 5. Considerazioni conclusive e lavoro futuro.

## Sintesi

La storia della Conoscenza mostra come le diverse discipline scientifiche messe a confronto, come le scienze umanistiche e le scienze esatte, quando riescono a interagire producono significativi avanzamenti. Nel presente lavoro, a partire dalle intuizioni di Mandelbrot sulla geometria frattale, è mostrato come è possibile ricercare e definire, nella scienza del ragionamento giuridico, strutture di tipo frattale che ne consentono la interpretazione e quantificazione numerica. In tale prospettiva è evidente come la quantificazione delle strutture del ragionamento giuridico renda possibile il controllo e, quindi, il miglioramento del raggiungimento degli obiettivi giuridici, siano essi la completezza dei riferimenti giurisprudenziali quanto la precisazione della tipologia di reato. Anche in questo caso la interazione tra discipline scientifiche, apparentemente, lontane lasciano intravedere sviluppi di ricerca interessanti, come si è mostrato attraverso la esemplificazione presentata.

## Abstract

The history of Knowledge shows how the different scientific disciplines compared, such as the humanities and the exact sciences, when they manage to interact, produce significant advances. In this work, starting from Mandelbrot's intuitions on fractal geometry, it is shown how it is possible to search and define, in the science of legal reasoning, fractal-type structures that allow their interpretation and numerical quantification. In this perspective, it is evident how the quantification of the structures of legal reasoning makes it possible to control and, therefore, to improve the achievement of legal objectives, whether they are the completeness of the case-law references or the specification of the type of crime. Also in this case the interaction between apparently distant scientific disciplines allows us to glimpse interested research developments, as has been shown through the example presented.

## Parole chiave

Frattali; Sistemi giuridici; Ricerca interdisciplinare.

---

\* Cultore della materia “Diritto Penale dell’Ambiente” nel Dipartimento di Scienze Aziendali e Giuridiche – Università della Calabria.

## 1. Premesse introduttive di metodo e contenuti.

Da un punto di vista storico-culturale, soprattutto in paesi come l'Italia, dal Rinascimento in poi c'è stata una tendenza molto forte volta a separare di netto e a costruire un preciso confine di demarcazione tra le discipline di tipo umanistico e scientifico-tecnico. Nel Medioevo invece le cose stavano molto diversamente: basti ricordare il ruolo che avevano le “corporazioni di arti e mestieri” in comuni come Firenze o altri. Emblematico a tal proposito è il caso citato da tutte i manuali di letteratura italiana in cui si riferisce il ruolo importante che ebbero personaggi come Dante Alighieri in una corporazione come l'*Arte dei Medici e degli Speziali*; non solo, anche di famosi pittori come Paolo Uccello, Giotto e Masaccio è ben nota l'appartenenza alla stessa corporazione, e questo lascia attoniti e stupiti gli studenti moderni! Fatta questa premessa, il lettore si chiederà cosa possa avere a che fare con il presente lavoro: esso vuole per l'appunto essere un piccolo contributo che miri ad avvicinare e possibilmente a fondere alcuni aspetti di due discipline apparentemente opposte, agli antipodi, e senza nessun punto di contatto tra esse: la giurisprudenza e la matematica. È importante infatti sottolineare come non ci siano confini di demarcazione così netti fra i diversi ambiti della ricerca moderna, ma la tendenza è appunto quella di recuperare una commistione di vedute e un avvicendamento di strumenti che è molto più consueto e frequente in altri paesi, europei e non, rispetto al nostro, oltre che il recupero, in certa misura, di un'integrità scientifico-culturale del tutto ordinaria e ancora meglio compiuta in epoca classica di quanto accennato per il periodo medievale e post-medievale.

In questo lavoro tratteremo di un inusitato convegno tra uno dei temi più recenti della matematica, ovvero i frattali e la geometria frattale sviluppata a partire da essi, con l'essenza intima del ragionamento e delle argomentazioni giuridiche. Bisogna anche precisare che esperimenti di tal guisa non sono certo inediti nel panorama scientifico contemporaneo: anche attingendo alle sole tematiche ingegneristico-ambientali, a noi particolarmente care, si possono citare numerosi e significativi precedenti. Negli anni '90 la teoria di frattali ha cominciato a trovare spazio in idrologia (si pensi alle reti fluviali, ai bacini idrici, ecc.): si può dire che all'inizio tale connessione non era sempre guardata con fiducia dagli esponenti del mondo accademico e dagli specialisti in materia; invece, oggi è divenuta un crocevia caratterizzante e imprescindibile. Rimanendo nello stesso ambito, la geometria frattale è risultata indispensabile negli studi dei profili e delle dinamiche costiere, ma anche nell'interpretazione del moto ondoso offshore unitamente alla *teoria del caos*<sup>1</sup>, e più recentemente anche a manufatti e strutture artificiali come, ad esempio, le reti idriche<sup>2</sup> e molto altro. Tramite la teoria frattale in molti casi si è riuscito a realizzare misure di ordine matematico che permettono una valutazione oggettiva e un resoconto largamente utilizzabile. Come esempio di quanto interesse susciti oggi l'opportunità di avere a disposizione parametri oggettivi di analisi o previsione, basti pensare agli indici di resilienza che stanno divenendo onnipresenti negli ambiti più disparati, tra cui

---

<sup>1</sup> Si veda L. HENRY, J. BRIDGE, *Wienerchaosexpansion of oceanwaves*, AIP Advances **11**, 035328 (2021) e i riferimenti in bibliografia.

<sup>2</sup> Si veda M. IWANEK, D. KOWALSKI, B. KOWALSKA, P. SUCHORAB, *Fractalgeometry in designing and operating water networks*, J. of EcologicalEngineering **21**(6) (2020), 229-236 e i riferimenti ivi contenuti.

anche le reti idriche<sup>3</sup>. Oltre ad esplorare la connessione “frattali & giurisprudenza”, il secondo *main objective* del presente lavoro è suggerire la possibilità di sfruttare tale congiunzione per ricavare dei parametri valutativi o degli indici che possano cominciare a svolgere un ruolo simile a quello ben realizzato e consolidato in altri settori da misure e indicatori matematici, originati sia da frattali che tramite svariati altri strumenti matematici. Si tratterebbe quindi di percorrere per la giurisprudenza una via già segnata da altre discipline, che hanno saputo attingere per prime al vasto patrimonio offerto dalla *scientia numerorum* e dai suoi domini.

### 1.1. Compendio dei contenuti.

Dopo il presente paragrafo introduttivo, il paragrafo 2 è volto a tracciare alcune caratteristiche matematiche delle figure frattali che sono essenziali per questo lavoro. Oltre a ricordare come sia non facile dare una definizione univocamente accettata e matematicamente rigorosa di frattale, ci soffermeremo in particolare sulla *dimensione di Hausdorff*, una delle più usate dimensioni frattali. Nella Sez. 3 ragguaglieremo il lettore circa i pochissimi articoli esistenti, quattro in totale, che, seppur in modo diverso, propongono un (forte) legame tra giurisprudenza e frattali. Traceremo quindi le linee di tale relazione. La Sez. 4 fornirà un esempio di “diramazione delle argomentazioni legali”, da cui, come vedremo, si origina una struttura frattale: esso sarà applicato all’esempio di un ipotetico brevetto riguardante l’economia circolare in ambito ambientale e ai reati che potrebbero insorgere, temi di grande attualità e importanza. La Sez. 5, infine, discute alcune direzioni di ricerca e approfondimento futuro, e in particolare la possibilità di concretizzare dalla connessione con i frattali degli indici di natura matematica utili alla giurisprudenza.

## 2. I frattali in matematica

Il termine “fractal”, o “frattale” in italiano, è stato originariamente coniato da Benoît Mandelbrot nel 1975 nel suo libro *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension*<sup>4</sup>. Etimologicamente, la parola frattale deriva dal latino *fractus* (p. p. di *frango*) che significa rotto, spezzato, ma può anche riferirsi ad una particolare caratteristica dei frattali, ovvero di possedere dimensione non intera (1, 2, 3, ecc., come un segmento, una figura piana o un solido, rispettivamente) ma frazionaria, come spiegheremo meglio più avanti. I frattali hanno fin da subito trovato enorme attenzione sia nella scienza pura che in quella applicata, in ambito artistico, ma anche in discipline insospettabili come architettura, tecnologia, biologia, anatomia umana, medicina, economia, legge e tante altre, oltre che un forte successo a livello divulgativo. Gli esempi universalmente più conosciuti a livello non accademico riguardano le numerosissime

---

<sup>3</sup> Si veda F. CALDAROLA, M. MAIOLO, *A mathematical investigation on the invariance problem of some hydraulic indices*, Applied Mathematics and Computation 409 (2021), 125726. Gli indici di resilienza per le reti idriche non hanno origine da aspetti frattali ma, in ogni caso, si basano su strumenti matematici.

<sup>4</sup> B. MANDELBROT, *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*, 2<sup>a</sup> ed., Parigi, Flammarion, 1986 (1<sup>a</sup> ed. 1975).

strutture frattali rintracciabili in natura.<sup>5</sup> Non ultima il celebre articolo dello stesso Mandelbrot sulla lunghezza della costa britannica<sup>6</sup>, dopo il quale la comunità scientifica andava via via riconoscendo come le coste fossero effettivamente interpretabili in modo molto soddisfacente da una modellizzazione di tipo frattale.

## 2.1. Cos'è un frattale per la matematica?

Non è affatto semplice dare una definizione rigorosa di frattale da un punto di vista matematico. Emblematico è il celebre sunto del medesimo Mandelbrot, che suona quasi come un epitaffio adottando l'accezione greca classica:

*beautiful, damn hard, increasingly useful. That's fractals.*<sup>7</sup>

Che i frattali siano sempre più adoperati e onnipresenti è un dato di fatto oggigiorno. Che sia spesso molto difficile studiarli lo prova già il celebre *insieme di Mandelbrot* che si definisce in appena un rigo (esso è infatti l'insieme  $M$  dei numeri complessi  $c$  per cui la successione dei valori assoluti  $(|f_c^n(0)|)_{n \in \mathbb{N}}$  rimane limitata,<sup>8</sup> dove  $f_c(z) = z^2 + c$  è un (semplicissimo) polinomio quadratico nella variabile complessa  $z$  con parametro complesso  $c$ ), ma è stato scritto dello stesso di essere «l'oggetto più complesso esistente in matematica»<sup>9</sup>. Le prime immagini di tale insieme si ebbero nel 1980, quando i computer raggiunsero un livello di potenza minimo da permetterne le prime rudimentali rappresentazioni.

Non esiste una definizione matematica di frattale precisa, rigorosa e universalmente accettata. Usualmente però, la caratteristica maggiore e determinante, è che un frattale abbia la cosiddetta proprietà di *invarianza di scala*, ovvero mantenga la stessa struttura a scale arbitrariamente piccole. Il termine “stessa” appena adoperato sta quindi per *autosimiglianza di scala*, o *self-similarity* in inglese, e parte dei problemi per ottenere una definizione matematica

---

<sup>5</sup> Si vedano ad esempio, B.MANDELBROT (1983). *The fractal geometry of nature*, Macmillan. ISBN 978-0-7167-1186-5; M.F. BARNSELY, H. RISING, *Fractals Everywhere*, Boston: Academic Press Professional, 1993. ISBN 0-12-079061-0; G.A. LOSA, T. F. NONNENMACHER, (2005). *Fractals in biology and medicine*, Springer. ISBN 978-3-7643-7172-2; J.Z. LIU, L.D. ZHANG, G.H. YUE (2003), "Fractal Dimension in Human Cerebellum Measured by Magnetic Resonance Imaging, in *Biophysical Journal*. 85 (6): 4041–4046, doi:10.1016/S0006-3495(03)74817-6; A.L. KARPERIEN, H.F. JELINEK, A.M. BUCHAN (2008). *Box-Counting Analysis of Microglia Form in Schizophrenia, Alzheimer's Disease and Affective Disorder*. *Fractals*. 16 (2): 103. doi:10.1142/S0218348X08003880; H.-O. PEITGEN, P.H. RICHTER, *La bellezza dei frattali*, Torino, Bollati Boringhieri, 1987, ISBN 88-339-0420-2; B. MASTRACCHIO, *Frattali. Arte, Natura e Modelli*, Monza, Kangourou Italia, 2010, pp. 43-46, ISBN 978-88-89249-15-4; D.L. TURCOTTE, *Fractals and chaos in Geology and Geophysics*, 2nd ed., Cambridge, Cambridge University Press, 1997.

<sup>6</sup> B. MANDELBROT (1967). *How Long Is the Coast of Britain?*, *Science*, 156 (3775): 636–638. doi:10.1126/science.156.3775.636.

<sup>7</sup> B. MANDELBROT, *24/7 Lecture on Fractals*. 2006 Ig Nobel Awards. Improbable Research.

<sup>8</sup> Ovvero, in simboli matematici,  $M := \{c \in \mathbb{C} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_c^n(0)| < +\infty\}$ .

<sup>9</sup> Si veda l'articolo di copertina del numero di *Scientific American*, agosto 1985 (traduzione italiana su *Le Scienze* ottobre 1985) di Benoît Mandelbrot, Heinz-Otto Peitgen e John H. Hubbard. Dallo stesso è tratta l'asserzione in questione. Tale articolo, inoltre, cominciò a rendere conosciuto l'insieme di Mandelbrot al grande pubblico, anche in virtù della suggestiva colorazione che conferisce il fascino ben noto a questo frattale.

semplice e rigorosa nascono proprio dall'esatta semantica che si intenda attribuire all'aggettivo "stessa" di cui sopra. Ad esempio, a seconda se si debba intendere

- autosimiglianza esatta,
  - autosimiglianza approssimata (contenente, ad esempio, distorsioni di un certo tipo e forme degeneri),
  - autosimiglianza stocastica,
  - autosimiglianza qualitativa,
- oppure altro, la definizione matematica varierà di conseguenza. Da un punto di vista

geometrico-topologico, si può far leva sul concetto di dimensione per dare una possibile caratterizzazione utile a definire rigorosamente una struttura frattale. Ad esempio, nel testo di Mandelbrot<sup>10</sup> viene suggerito di definire un frattale come un insieme la cui *dimensione di Hausdorff-Besicovitch* (o, semplicemente, *dimensione di Hausdorff*) eccede strettamente la sua *dimensione topologica*. In altre fonti si parla di dimensione di Hausdorff non intera; ad esempio, il ben noto *triangolo di Sierpinski*, di cui si hanno delle fantastiche approssimazioni in alcune basiliche romane del sec. XI<sup>11</sup>, ha dimensione di Hausdorff uguale a  $\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,58$ , e l'*insieme di Cantor* il valore reciproco, ovvero  $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63$ . Ma neanche questo tipo di definizione, come premesso, soddisfa pienamente gli scopi: le curve che riempiono uno spazio piano hanno infatti dimensione di Hausdorff 2, pari allo spazio che riempiono, ma sono classificate come *curve frattali*<sup>12</sup>. Si ricorre a volte al concetto di *non differenziabilità* in ogni punto.

### 3. Cosa c'è di frattale in ambito normativo-legale e in giurisprudenza?

In questo articolo tratteremo il legame, che potrebbe sembrare sorprendente (ma non lo è), tra sistemi normativi, argomentazioni giuridiche e frattali: basti ricordare a tal proposito come la stessa struttura della mente umana e il suo operare sia molto vicina ai modelli frattali, o per usare le parole di Mandelbrot:

*«Si ritiene che in qualche modo i frattali abbiano delle corrispondenze con la struttura della mente umana, è per questo che la gente li trova così familiari. Questa familiarità è ancora un mistero e più si approfondisce l'argomento più il mistero aumenta.»*

Per quello che riguarda il mondo normativo-giuridico, pur riconoscendo moltissimi studiosi e ricercatori, profondi legami e inerenze con i modelli di tipo frattale, ad oggi sono molto

---

<sup>10</sup> B. MANDELBROT, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company, New York (1982).

<sup>11</sup> Si veda, ad esempio E. CONVERSANO, L. TEDESCHINI LALLI, *Sierpinski triangles in stone, on medieval floors in Rome*, J. Appl. Math. 4 (2011), 113-122.

<sup>12</sup> Si veda ad esempio L. ANTONIOTTI, F. CALDAROLA, M. MAIOLO, *Infinite numerical computing applied to Hilbert's, Peano's, and Moore's curves*, Mediterr. J. of Math. (2020) 17:99, doi:10-1007/s00009-020-01531-5.

scarsi gli articoli pubblicati in tal senso. Per quanto a nostra conoscenza, contiamo solo due pubblicazioni che si dedicano *in toto* a questo scopo. Ricordiamo il pioneristico lavoro di David Post e Michael Eisen del 2000, *How long is the coastline of the law? Thoughts on the fractal nature of legal systems*<sup>13</sup>, e il più recente articolo di A.M. Stumpff del 2013, *The law is a fractal: the attempt to anticipate everything*.<sup>14</sup>

Il titolo del primo articolo ha per incipit una domanda diretta: *quanto è lunga la linea costiera della legge?* Il terzo paragrafo ha per titolo una domanda ancora più diretta: *La legge è un oggetto frattale?* Ciò si contrappone invece al titolo dell'articolo di Stumpff in cui il fatto che la legge stessa, nella più ampia accezione, sia un frattale è cosa assodata; il tentativo è quello di anticipare, predire l'esatta applicazione delle regole e leggi, i cui effetti, per il legislatore, o chi le scrive, non sono noti a priori.

Post ed Eisen notano, sempre nel paragrafo III, come il processo delle argomentazioni legali somiglia molto a quello di aggiungere rami sempre più specifici ad una struttura iniziale *in modo ricorsivo*, tipico procedimento di costruzione dei frattali in geometria. Questo, secondo gli autori, genera una forte autosimiglianza di scala, di cui si parlava, da un punto di vista matematico, nel paragrafo 2 di questo scritto. E procedendo a ritroso, gli autori fanno risalire la ramificazione nelle argomentazioni alla stessa «ramificazione nella struttura dottrinale» proposta originariamente da J. Balkin, a cui accenneremo più avanti, che non ha nessun punto di arrivo naturale, ma potrebbe, almeno in teoria, continuare indefinitamente con una serie discendente di regole che incrementano via via sia la specificità delle predeterminazioni, sia la complessità strutturale globale. Ciò è infatti in accordo con la diffusa convinzione che per un legislatore è impossibile scrivere delle leggi o regole che coprano ogni contingenza futura a priori.

Per completezza del presente scritto, informiamo il lettore riguardo ad altri due articoli scritti da Jack Balkin un paio di decenni prima rispetto a quelli di Post ed Eisen e Stumpff, di cui si è parlato prima. Il primo dei due scritti di Balkin risale al 1986<sup>15</sup> e parla espressamente di *struttura cristallina del pensiero legale* in più di cento pagine. Nonché, 5 anni dopo nel 1991, lo stesso Balkin pubblica un articolo<sup>16</sup> in cui precisa che un modello frattale avrebbe interpretato molto meglio di una struttura cristallina il soggetto del corposo lavoro del 1986. Pensiamo che nei primi anni '80 i frattali fossero ancora poco conosciuti presso i non addetti ai lavori e i non matematici, quindi, come spesso accade, Balkin aveva anticipato con un'applicazione un modello matematico ancora inesistente per la sua cognizione. La prima intuizione che la dottrina legale avesse una struttura ramificata è quindi di Balkin, anche se lo stesso la

---

<sup>13</sup> D.G. POST, M.B. EISEN, *How long is the coastline of the law? Thoughts on the fractal nature of legal systems*, The Journal of Legal Studies 29, n. S1 (2000), 545-584.

<sup>14</sup> A.M. STUMPF, *The law is a fractal: the attempt to anticipate everything*, Loyol Univ. Chicago Law J. 44 (2013), 649-681.

<sup>15</sup> J.BALKIN, *The crystalline structure of legal thought*, Rutgers Law Review, vol. 39 n. 1 (1986), 1-103.

<sup>16</sup> J.BALKIN, *The promise of legal semiotics*, Univ. Texas Law Review, vol. 69 (1991), 1831-1852.



paragonava in modo non impeccabile a quanto di più simile esistente a sua conoscenza, ovvero i cristalli.

Se J. Balkin è passato tra gli anni '80 e '90 da una struttura di tipo cristallino ad una ben più calzante di frattale, e se nei decenni a cavallo del cambio di secolo quest'ultima interpretazione risultava inattesa a tanti, per i ricercatori e gli studiosi di oggi, interpretare "la legge" come un frattale è divenuto, come dicono gli inglesi, un *common place*, e questa è cosa assai significativa che da forte motivazione ad indagare questo tipo di questioni in modo scientifico e, auspicabilmente, adoperando gli strumenti matematici che offre la geometria frattale.

#### **4. Un esempio di ramificazione frattale su contenzioso riguardo ad un brevetto per il riuso dei materiali.**

In questo paragrafo esamineremo la ramificazione delle argomentazioni legali che si potrebbe generare a partire da un caso di contenzioso riguardo allo sfruttamento di un brevetto per invenzione. In particolare, considereremo le cosiddette tematiche *green*, molto importanti oggi, della sostenibilità e della tutela ambientale: prenderemo in esame il riuso dei materiali e i reati ambientali ad esso connessi e, a titolo esemplificativo, faremo vedere come si possono diramare le argomentazioni legali in merito, in modo indefinito, senza mai potenzialmente giungere ad un punto di fine o di arrivo. Ciò darà adito ad accostare tale risultante costruito logico-spaziale alla geometria dei frattali propriamente detti, di cui abbiamo parlato nelle sezioni precedenti da un punto di vista matematico.

La scelta di una particolare contingenza a cui applicare il nostro tipo di analisi non ha valore ineluttabile *in re ipsa* ma è resa parimenti necessaria per dar concretezza a speculazioni logico-matematiche che rimarrebbero altrimenti troppo astratte e poco comprensibili. Un'analisi simile a quanto cercheremo di fare noi in questo paragrafo è possibile in moltissimi altri casi, a patto che siano corredati da una "sufficiente complessità" intrinseca. C'è magari chi preferisca sostituire "tutti" a "moltissimi" asserendo che, opportunamente cercata, la complessità si rintraccerebbe ovunque, ma ciò non è per noi rilevante *ad substantiam*, almeno in questa sede. Banalizzando, un furto d'auto ci sembra si presti molto meno ai nostri scopi illustrativi, mentre l'esempio scelto, in sella tra più domini di forte attualità, potrebbe suscitare di per sé l'interesse del lettore oltre che essere un campo di studio e di ricerca sommamente avvincente per chi scrive. Ne approfittiamo quindi per tracciare qualche stimolante linea di contorno dell'ambiente, è il caso di dirlo, in cui si svilupperanno esempio ed analisi conseguente.

Per quanto riguarda il concetto di brevetto, è ben noto come esso sia un titolo giuridico, la cui regolamentazione varia in maniera considerevole da paese a paese. In linea di massima, tratti comuni a tutti i moderni sistemi legislativi occidentali sono che esso conferisce al titolare i

diritti di sfruttamento di un'invenzione nell'ambito di un certo territorio e in un arco temporale ben determinato. Sebbene la diffusione dei brevetti, o loro equivalenti, avesse subito un enorme impulso in epoca tardo medievale e rinascimentale, la sua istituzione invece è molto più antica risalendo fino all'età classica. A tale proposito, ci piace ricordare che il primo brevetto della storia risale alla Magna Grecia nel VII sec. a.C. e precisamente all'antica città di Sibari<sup>17</sup>, situata qualche decina di chilometri a nord da Rende, sede dell'Università della Calabria da cui scriviamo, la cui comunità accademica oggi è detentrica a vario titolo di numerosi brevetti nelle più svariate discipline.

Esaminiamo, ad esempio, il riutilizzo dei materiali di risulta provenienti dalle demolizioni edili negli interventi di protezione e ripascimento degli arenili, ovvero il riutilizzo di materie prime seconde, in gergo tecnico. Il ripascimento artificiale spesso consiste nel riportare una certa volumetria di sabbia presso spiagge turistiche site in località balneari dove è stata erosa (specialmente nel corso dell'inverno). Ma la sabbia e il materiale da depositare devono soddisfare precise e dettagliatissime caratteristiche peculiari del tratto di litorale in questione: ad esempio, stesso colore, stessa composizione (per es. quarzo, granuli di conchiglie o coralli, o altro), stessa granulometria, ecc. Il ripascimento artificiale è quindi un'operazione molto complessa e delicata che deve rispettare una serie di regolamentazioni e normative molto stringenti e severe, sia di carattere giuridico che di carattere propriamente scientifico. A tale proposito precisiamo inoltre come ci siano sostanziali differenze tra il ripascimento di un arenile propriamente detto, ovvero la porzione di litorale subito prospiciente alla linea di costa che viene interessata da frange di acqua marina, magari durante le più forti mareggiate invernali, e il tratto dunoso che in natura subentra appena fuori dalla portata dei finali ondosi più invadenti. Tale tratto, purtroppo, è stato molto spesso edificato nel secolo scorso e ciò ha prodotto nefaste conseguenze di varia specie sull'equilibrio costiero.

Non è raro che le varie questioni e problematiche marino-costiere, sia risalenti a costruzioni o abusi storici oppure riguardanti interventi di ripristino o protezione pianificati per il prossimo futuro, diano origine ad accessi dibattiti di tipo ambientale e politico, ancorché

---

<sup>17</sup> Si veda il saggio di P. SCAGLIONE, *Il brevetto di Sibari e le anticipazioni storiche dell'agente di Calabria*, Franco Pancallo Editore, 2008, oppure C. ANTHON, *A Classical Dictionary: Containing An Account of the Principal Proper Names Mentioned in Ancient Authors, And Intended To Elucidate All The Important Points Connected With The Geography, History, Biography, Mythology, And Fine Arts Of The Greeks And Romans Together With An Account Of Coins, Weights, And Measures, With Tabular Values Of The Same*, Harper & Bros, 1841, p. 1273. Nel lavoro di P. Scaglione l'autore mette bene in risalto la modernità di tale concezione nell'arcaica Sibari (Sýbaris, greco antico). Il brevetto è inteso come diritto di esclusività, ovvero nella formula *alios excludendi* per la durata temporale di un anno: senza l'autorizzazione del titolare del brevetto o concessione, non era possibile a chiunque replicare o trarre beneficio dall'invenzione. Oltre alle disposizioni di tipo prettamente giuridico, Scaglione fa notare inoltre un'altra peculiarità veramente moderna intesa già a Sibari circa 2.700 anni fa, che trova una sorprendente corrispondenza con l'Art. 1, Sect. 8 della Costituzione degli Stati Uniti d'America del 1789: le finalità del brevetto non sono tanto quelle di salvaguardare un mero interesse personale, ma di incentivare la competizione tra inventori, e quindi promuovere, tramite l'eccellenza, l'innovazione e il progresso della comunità.

accresciuti ed ampliati inoltre dagli ingenti costi che le amministrazioni devono sostenere per effettuare opere e interventi nei tratti litoranei, come, e.g., il ripascimento di arenile a cui si accennava sopra. Spesso si vede poi intervenire l'autorità giudiziaria a vario titolo, di fronte ad azioni non conformi ai dettami giuridici e scientifici.

Negli ultimi anni, in Italia, attraverso le statuizioni del Giudice delle leggi e degli Ermellini nonché interventi legislativi, è emerso che i rifiuti che giacciono sui litoranei possono essere molteplici e, in base alle loro diversità, differenti sono le posizioni assunte. Con riferimento ai rifiuti provenienti da demolizioni edili, la Corte di Cassazione, in una recente pronuncia, ritenendo inammissibili i ricorsi proposti e, quindi, confermando la sussistenza del reato di cui all'art. 256, comma 1 lett. a) del d.lgs. 152/2006, in relazione ad una condotta non autorizzata di trasporto e smaltimento di rifiuti provenienti da demolizioni edili, attraverso sotterramento in una spiaggia, ha di fatto confermato l'impossibilità di utilizzare tali materiali per il ripascimento degli arenili<sup>18</sup>.

Diversamente, con riferimento ai residui di posidonia presenti lungo le spiagge, risulta particolarmente rilevante una recente pronuncia in cui la Corte Costituzionale è stata chiamata a stabilire se detti residui debbano o meno essere considerati rifiuti e, quindi, soggetti alla relativa disciplina, con conseguente dichiarazione di illegittimità delle norme della legge della Regione autonoma Sardegna al vaglio della Corte. Ebbene, il Giudice delle leggi, pur riconoscendo il meritevole fine perseguito dal legislatore regionale ha, però, statuito la particolare natura dei residui di posidonia i quali, vengono considerati, al contempo, rifiuti da assoggettare alla relativa disciplina da un lato e, risorsa di salvaguardia ambientale dall'altro. Ne deriva il loro assoggettamento alla disciplina statale in tema di rifiuti, la quale ne prevede espresso esonero solo nei casi in cui vengano trattate *in situ*. Sicché, la Corte, pur riconoscendo la naturale vocazione e il valore ambientale della posidonia, non ritiene di sposare la teoria del legislatore regionale, il quale afferma che i residui di posidonia debbano essere considerati rifiuti nei casi in cui se ne abbia l'intenzione di disfarsene ed esclude, quindi, che i suoi accumuli possano essere temporaneamente spostati durante la stagione estiva, in aree idonee del medesimo arenile o in altre preventivamente individuate<sup>19</sup>.

In ultimo, ma solo da un punto di vista cronologico, un'importante svolta è costituita dalle “Disposizioni per il recupero dei rifiuti in mare e nelle acque interne e per la promozione dell'economia circolare”, la c.d. Legge Salva Mare<sup>20</sup>. Tale introduzione legislativa costituisce un'importante passo in avanti per la tutela delle acque poiché dalla sua entrata in vigore sarà consentito ai pescatori, nonché alle associazioni di settore, di portare a riva i rifiuti raccolti in

---

<sup>18</sup> Cass. Pen. Sez. III, n. 5909/2020.

<sup>19</sup> Corte Cost. sent. N. 86/2021.

<sup>20</sup> L. 17 maggio 2022, n. 60 “Disposizioni per il recupero dei rifiuti in mare e nelle acque interne e per la promozione dell'economia circolare” (cd. “Legge Salva Mare”).

mare (ma anche in fiumi, laghi e lagune). Finora, infatti, portare rifiuti a riva comportava l'irrogazione di sanzioni o il pagamento di una tassa commisurata alla quantità di rifiuti, sicché i pescatori hanno sempre optato per il rilascio in mare della plastica accidentalmente recuperata.

Grazie alla nuova legge vengono introdotte le definizioni di “rifiuti accidentalmente pescati” (RAP) e “rifiuti volontariamente raccolti” (RVR), anche attraverso i sistemi di cattura e non solo durante le operazioni di pulizia del mare. Viene, inoltre, stabilita l'equiparazione dei rifiuti accidentalmente pescati ai rifiuti delle navi, con la conseguenza che potranno essere conferiti in appositi punti di raccolta all'interno dei porti, in modo gratuito.

Consideriamo quindi il caso di un ipotetico contenzioso per lo sfruttamento dei diritti derivanti da un brevetto inerente, ad esempio, il riuso di materie prime seconde, derivanti da un certo tipo di demolizione edile. Supponiamo che il ricorrente A accusi il convenuto B di avere utilizzato tale brevetto o riprodotto i contenuti senza possederne i diritti. Ad un primo livello, quello di massima generalità, ci si può chiedere se B sia o meno responsabile di aver violato una proprietà intellettuale o diritto d'autore coperto da un brevetto. Ma subito, al livello due, la questione si ramifica immediatamente, ad esempio in quattrobranche:

1. Il ricorrente A è realmente il detentore dei diritti d'autore o d'invenzione?
2. L'oggetto tutelato dal brevetto o la procedurabrevettata in questione, è realmente assoggettata o assoggettabile ad un regolare brevetto?
3. I proventi derivati da tale invenzione o innovazione sono realmente vincolati o vincolabili?
4. B ha violato uno o più norme ai danni di A?

Il convenuto B ora potrebbe argomentare seguendo una, due, tre, o tutte e quattro le diramazioni esemplificate sopra, producendo altri filoni. Ad esempio, potrebbe suddividere la questione 1 in tre sotto questioni come segue:

- 1.1. L'invenzione o processo innovativo considerato è realmente originale? Oppure è uno sviluppo di qualcosa già esistente o conosciuto prima?
- 1.2. Il prodotto brevettato è pienamente, e in modo incontrovertibile, frutto dell'ingegno o del lavoro di A?
- 1.3. Le leggi vigenti in Italia consentono di tutelare o coprire il prodotto considerato tramite un brevetto?
- 1.4. Il brevetto è temporalmente valido e in essere al momento o durante le presunte violazioni?
- 1.5. I diritti in questione sono stati oggetto di trasferimento?

Si potrebbe continuare l'elenco con altri rami “di livello due” oppure, opzioni equivalenti potrebbero comparire più avanti nello sviluppo dello schema che stiamo considerando. Ognuno dei punti su esposti potrebbe dare origine ad ulteriori rami di “livello tre”, ad esempio, 1.3

potrebbe dare origine alle seguenti successive propaggini:

1.3.1. Il brevetto in oggetto soddisfa pienamente le indicazioni e i requisiti di legge?

1.3.2. Ciò che A vorrebbe fosse tutelato coincide con quanto coperto dal brevetto?

1.3.3. Il beneficio che B ha saputo trarre, secondo l'interpretazione giuridica vigente, proviene strettamente da qualcosa *sub tutela*?

A sua volta l'item 1.3.1 apre una serie di considerazioni e di ulteriori sotto-diramazioni che entrano nell'ambito specifico delle legislazioni ambientali vigenti in Italia e che a loro volta fanno capo a convenzioni europee ed internazionali. Ad esempio, se ci fosse il sospetto che tale brevetto possa violare le prescrizioni della DGA (Direzione Generale dell'Ambiente) della Commissione Europea o non essere conforme alle politiche della GIZC (Gestione Integrata delle Zone Costiere) o del CdR (Comitato Europeo delle Regioni), ecc., si svilupperebbero una serie di sotto-questioni a catena che coinvolgerebbero ambiti comunitari e regolamentazioni internazionali, risultando in una palese complessità via via crescente dell'intero schema.

Ora dovrebbe risultare abbastanza chiaro come sia possibile proseguire indefinitamente un'argomentazione "discendente" per successive diramazioni. Questo aspetto va tenuto in gran conto perché è proprio l'eventuale infinita ramificazione di un albero (o di un grafo in generale) che permette il salto verso le figure frattali e la geometria frattale, matematicamente parlando. L'albero di cui sopra, quindi, va inteso come illimitato e con infinite ramificazioni discendenti: solo con questo intendimento intervengono in causa i frattali.

Chiudiamo il presente paragrafo con l'osservazione che un medesimo processo di quello sopra descritto, dante origine ad una struttura di albero infinito, si può mettere in essere, almeno in teoria, in molteplici diverse situazioni che compaiono in ambito giuridico.

## **5. Considerazioni conclusive e lavoro futuro.**

Uno dei fini di questo lavoro è quello di introdurre e diffondere anche in Italia un certo tipo di idee che comportano delle strette connessioni tra i sistemi legali e legislativi e, in generale, il tipico modo di argomentare giuridico-legale, sia in sede di contenzioso che legiferativo o altro, con la moderna visione che la geometria frattale offre al nostro mondo e che sta estendendo non solo su tutte le branche della scienza o quasi, ma anche su domini insospettabili, come si è visto nella Sez. 2. Questo articolo vuole quindi, in primis, essere da sprone per la comunità scientifica addetta ai lavori, poco avvezza in genere ad accostare discipline *apparentemente* tanto diverse come giurisprudenza e matematica o a pensare ai sistemi e disquisizioni giuridiche in termini matematici o simili, per incentivare le indagini e la discussione in tal senso. Ma essi non dovrebbero affatto limitarsi a quanto avanzato dai pochi, o meglio dai quattro articoli più volte ricordati in precedenza, che hanno assunto un ruolo da apripista assolutamente inedito e inatteso alla data della loro pubblicazione. Partendo da questa base ormai abbastanza

conosciuta, almeno nella singolarità dell'accostamento propugnato, diverse sono le questioni che potrebbero essere sollevate e investigate. Una di esse, che ci sembra molto importante, riguarda la possibilità di valutare in modo oggettivo la composizione di un'argomentazione giuridica, o meglio la sua "completezza" se si vuol dir così. Quanto sia interessante cercare di discernere se una certa trattazione sia integra o esauriente va da sé, e la relazione con la matematica potrebbe magari offrire una sorta di misura o indice che permetta una valutazione quantitativa e un certo grado di determinazione. A tale proposito, uno strumento che potrebbe essere fruttuoso, e sicuramente molto intrigante, è la *dimensione frattale* o *dimensione di Hausdorff* di cui si è parlato nella Sez. 2. Da un punto di vista matematico, la dimensione di Hausdorff di un costruito o una figura  $F$ , magari definita ricorsivamente, che si estenda in uno spazio  $n$ -dimensionale, ad esempio l'ipercubo o  $n$ -cubo unitario  $I^n = I \times I \times \dots \times I \subset \mathbb{R}^n$  (dove  $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$  è l'intervallo chiuso unitario), dà la misura di quanto  $F$  "riempia" lo spazio  $n$ -dimensionale ambiente, in questo caso  $I^n$ . Ad esempio, il celeberrimo caso delle curve continue che riempiono uno spazio bidimensionale (ma allo stesso modo uno spazio  $n$ -dimensionale con  $n$  intero positivo qualsiasi), scoperto per la prima volta dal matematico italiano Giuseppe Peano nel 1890,<sup>21</sup> sono allo stesso tempo, in un certo senso, il primo esempio di curva frattale: per esse la dimensione di Hausdorff non è frazionaria ma è esattamente 2 perché riempio il quadrato unitario, nel senso che tali curve sono "suriezioni continue" dall'intervallo unitario  $I$  al quadrato unitario  $I^2$ . La quasi totalità dei frattali ha invece dimensione frazionaria; si ricordi a tal proposito l'esempio del triangolo di Sierpinski e dell'insieme di Cantor nella Sez. 2, che hanno dimensione di Hausdorff reciproca uno rispetto all'altro, e approssimativamente uguale a 1,58 e 0,63 rispettivamente. Ciò significa che 1,58 si può pensare come un indice di quanto il frattale dato dal triangolo di Sierpinski si capace di riempire uno spazio di dimensione 2: facendo il rapporto si ottiene  $1,58/2 = 0,79$  ovvero il 79%. Nel caso dell'insieme di Cantor la dimensione di Hausdorff pari a 0,63 va invece intesa come la capacità di riempire uno spazio *monodimensionale*, ovvero il segmento  $I$ : il rapporto  $0,63/1$  restituisce il 63% e quindi potremmo concludere che il triangolo di Sierpinski riempie meglio uno spazio bidimensionale rispetto a quanto fa l'insieme di Cantor con uno spazio monodimensionale.

Ritornando quindi al focus di cercare un indice o misura che possa determinare quanto sia "completa" o "esauriente" un'argomentazione giuridica, o anche legislativa o normativa, sarebbe molto affascinante poter definire una dimensione di Hausdorff per l'albero frattale da essa generato, e usare tale dimensione per dare una valutazione di quanto la trattazione o il

---

<sup>21</sup> Si veda ad esempio, L. ANTONIOTTI, F. CALDAROLA, M. MAIOLO, *Infinite numerical computing applied to Hilbert's, Peano's, and Moore's curves*, Mediterranean Journal of Mathematics **17**(3), 99 (2020); F. CALDAROLA, *The Sierpinski curve viewed by numerical computations with infinities and infinitesimals*, Applied Mathematics and Computation **318** (2018), 321-328; F. CALDAROLA, *The exact measures of the Sierpinski-d-dimensional tetrahedron in connection with a Diophantine nonlinear system*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **63** (2018), 228-238, e i riferimenti in bibliografia.

discorso sia “pieno”, esaustivo, e di quanto il possibile dedurre sia compiuto. Va comunque sottolineato che non è tanto il numero dei “rami paralleli” o delle diramazioni principali che dà matematicamente la dimensione di un albero frattale: ogni rametto preso a sé, per la proprietà di autosimiglianza, dovrebbe dare sempre la stessa dimensione. Bisogna quindi intendere quanto sia “fitto, folto” il diramarsi delle argomentazioni e delle sotto questioni discendenti, di modo che, “all’infinito” riescano più o meno bene a riempire lo spazio ambiente dato. Anche la natura di tale spazio ambiente dovrebbe essere approfondita cercando di delinearne in modo preciso le caratteristiche e l’estensione. Un altro modo per spiegare cosa si può intendere per “completezza giuridica” è pensare a quanto siano state considerate nello sviluppo iterativo tutte le ipotesi, all’eventualità di aver lasciato “buchi” più o meno grandi nel ragionamento, alla definitiva esaustività dell’argomentare, dove definitiva va inteso in senso matematico, ovvero per tutte le iterazioni da un certo punto in poi.

Concludiamo il presente lavoro accennando ad un altro possibile indirizzo di ricerca riguardo al connubio “giurisprudenza & frattali”. I numerosi corpi di leggi e normative esistenti in tutti i paesi del mondo, potrebbero avere essi stessi una struttura di tipo frattale. Per introdurre delle misure matematiche si potrebbe, ad esempio, alle relazioni e interconnessioni che si possono riscontrare all’interno dello stesso corpo o sistema di leggi. Oppure si potrebbero prendere in esame le citazioni multiple presenti nelle sentenze di tutti i gradi, magari attribuendo dei valori o peculiarità diverse.